

令和9年度 専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学

(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き、答を指定の欄に記入して下さい。

(1 / 4)

志 望 専 攻 名	受検番号	氏 名
工学専攻		

得 点	総得点

問題1. 次の各問いに答えよ。配点 (1) 5点, (2) 5点, (3) 8点, (4) 7点

(1) $f(x) = \tan^{-1} \frac{1}{1-x}$ のとき, $f'(x)$ を求めよ。

答

$$\frac{1}{2-2x+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{(1-x)^2 + 1} = \frac{1}{2-2x+x^2}$$

(計算過程による減点を行わない)

(2) $f(x) = \log |\sin x + \cos x|$ のとき, $f''(x)$ を求めよ。

答

$$-\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \text{ より}$$

$$f''(x) = \frac{-(\sin x + \cos x)^2 - (\cos x - \sin x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{-2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

(計算過程による減点を行わない)

(3) $z = \frac{x-y}{x+y}$, $x = \sqrt{1+t}$, $y = \sqrt{1-t}$ のとき, $\frac{dz}{dt}$ を求めよ。

答

$$\frac{1}{1-t^2 + \sqrt{1-t^2}}$$

$$z_x = \frac{2y}{(x+y)^2}, z_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}, x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2x}, y'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} = -\frac{1}{2y} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{y}{x(x+y)^2} + \frac{x}{y(x+y)^2} = \frac{y^2 + x^2}{xy(x+y)^2} = \frac{(1-t) + (1+t)}{\sqrt{1-t^2}(x^2 + 2xy + y^2)} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}(2 + 2\sqrt{1-t^2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}(1 + \sqrt{1-t^2})} \end{aligned}$$

(計算過程による減点を行わない)

(4) $f(x, y) = e^{2x}(\cos y - \sin y)$ のとき,
 $f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - \{f_{xy}(x, y)\}^2$ を求めよ。

答

$$-8e^{4x}$$

$$f_x = 2e^{2x}(\cos y - \sin y), f_y = e^{2x}(-\sin y - \cos y)$$

$$f_{xx} = 4e^{2x}(\cos y - \sin y), f_{yy} = e^{2x}(-\cos y + \sin y), f_{xy} = -2e^{2x}(\cos y + \sin y) \text{ より}$$

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -4e^{4x}(\cos y - \sin y)^2 - 4e^{4x}(\cos y + \sin y)^2 = -4e^{4x}(2\cos^2 y + 2\sin^2 y) = -8e^{4x}$$

(計算過程による減点を行わない)

令和9年度 専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学

(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き、答を指定の欄に記入して下さい。

(2/4)

志 望 専 攻 名	受 検 番 号	氏 名
工学専攻		

得 点

問題2. 次の計算をせよ. 配点 各5点

(1) $\int_1^e \frac{1 + \log x}{x} dx$

答	$\frac{3}{2}$
---	---------------

$1 + \log x = t$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{x}{t} \begin{matrix} 1 \rightarrow e \\ 1 \rightarrow 2 \end{matrix}$

与式 $= \int_1^2 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^2 = \frac{3}{2}$

(計算過程による減点を行わない)

(2) $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$

答	2
---	---

与式 $= [-x^2 e^{-x}]_0^\infty + 2 \int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{e^x} \right) + 2 [-x e^{-x}]_0^\infty + 2 \int_0^\infty e^{-x} dx$
 $= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{e^x} \right) + 2 [-e^{-x}]_0^\infty = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^x} \right) + 2 = 2$

(計算過程による減点を行わない)

(3) $\iint_D (x+y) dx dy$, D は直線 $y = x$ と放物線 $y^2 = x$ で囲まれた領域

答	$\frac{3}{20}$
---	----------------

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ より

与式 $= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (x+y) dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{2} x - \frac{3}{2} x^2 \right) dx$
 $= \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$

(計算過程による減点を行わない)

(4) $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$, $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$

答	$\pi \log 3$
---	--------------

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと、 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

与式 $= \int_0^\pi \left\{ \int_1^3 \frac{r}{r^2} dr \right\} d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_1^3 \frac{1}{r} dr = [\theta]_0^\pi [\log r]_1^3 = \pi \log 3$

(計算過程による減点を行わない)

令和9年度 専攻科入学選抜前期学力検査問題

数学

(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き、答を指定の欄に記入して下さい。

(3/4)

志 望 専 攻 名	受検番号	氏 名
工学専攻		

得 点

問題3. 次の微分方程式の一般解を求めよ. 配点 (1) 6点, (2) 6点, (3) 9点, (4) 9点

(1) $\frac{dy}{dx} \cos x \sin y = \sin x \cos y$

答 $\cos y = C \cos x$

- (i) $y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) のとき $\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$.
 $-\log |\cos y| = -\log |\cos x| + C$ であるから $\cos y = C \cos x$.
(ii) $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) のとき, これは与式の解である.
しかし, 上式の一般解において $C = 0$ とすれば得られる.
(i), (ii) より, 求める一般解は $\cos y = C \cos x$

(計算過程による減点を行わない)

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$

答 $y = -\frac{\cos x}{x} + \frac{C}{x}$

与式の両辺に x をかける.

$xy' + y = \sin x$ より, $(xy)' = \sin x$. $xy = \int \sin x dx$ であるから, $xy = -\cos x + C$.

よって, 求める一般解は $y = -\frac{\cos x}{x} + \frac{C}{x}$.

(計算過程による減点を行わない)

(3) $y'' + 2y' + 2y = x$

答 $y = e^{-x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

(i) $y'' + 2y' + 2y = 0$ とおく. 特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ を解くと, $\lambda = -1 \pm i$.

したがって, 一般解は $y_h = e^{-x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.

(ii) 特殊解を $y_p = ax + b$ とおく. これを与式に代入して係数を比較すると $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ を得る.

(i), (ii) より, 求める一般解は $y = y_h + y_p = e^{-x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

(計算過程による減点を行わない)

(4) $y'' - y = e^x + e^{2x}$

答 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x e^x + \frac{1}{3}e^{2x}$

(i) $y'' - y = 0$ とおく. 特性方程式 $\lambda^2 - 1 = 0$ を解くと, $(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$ より $\lambda = \pm 1$.

したがって, 一般解は $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

(ii) 特殊解を $y_p = a x e^x + b e^{2x}$ とおく. これを与式に代入して係数を比較すると $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ を得る.

(i), (ii) より, 求める一般解は $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x e^x + \frac{1}{3}e^{2x}$.

(計算過程による減点を行わない)

令和9年度 専攻科入学選抜前期学力検査問題

数学

(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き、答を指定の欄に記入して下さい。

(4/4)

志望専攻名	受検番号	氏名
工学専攻		

得点

問題4. 次の各問いに答えよ。配点 (1) 10点, (2)① 10点, (2)② 5点

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ。

答 $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -7 & -4 \\ 5 & -5 & -5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij})$ とおくと

$\tilde{a}_{11} = 6, \tilde{a}_{12} = 5, \tilde{a}_{13} = 3 \quad \therefore |A| = 6 - 10 + 9 = 5$

$\tilde{a}_{21} = -7, \tilde{a}_{22} = -5, \tilde{a}_{23} = -1 \quad (|A| = 7 - 0 + 2 = 5)$

$\tilde{a}_{31} = -4, \tilde{a}_{32} = -5, \tilde{a}_{33} = -2 \quad (|A| = -8 + 15 - 2 = 5)$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -7 & -4 \\ 5 & -5 & -5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(計算過程による減点を行わない)

(2) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ について、次の各問いに答えよ。

① A の固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$), および、 λ_1, λ_2 に対応する固有単位ベクトル p_1, p_2 をそれぞれ1つずつ求めよ。

答 $\lambda_1 = 7, p_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -6, p_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ より、 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 42 = (\lambda + 6)(\lambda - 7) = 0$

$\therefore \lambda_1 = 7, \lambda_2 = -6$

$\lambda_1 = 7$ のとき、 $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ より、 $2x - 3y = 0, 2x = 3y \quad \therefore x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおくと

$|x_1| = \sqrt{13}$ より、 $p_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は条件を満たす (異符号でも可)

$\lambda_2 = -6$ のとき、 $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ より、 $3x + 2y = 0, 3x = -2y \quad \therefore x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$|x_2| = \sqrt{13}$ より、 $p_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は条件を満たす (異符号でも可)

(計算過程による減点を行わない)

② A を対角化する直交行列 P を求め、対角化せよ (答のみ記入せよ)。

答 $P = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき ${}^t P A P = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$