令和6年度　専攻科入学者選抜後期学力検査問題【解答】

数学　　注意：解答過程をはっきりと書き，解答欄がある問題については結果を欄内に記入せよ．

志望専攻名	受験番号	氏名
工学専攻		

得点	総得点

1.

(1) $y=\sin^{-1}x$ のとき，$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}$ を計算せよ．(6点)

答	0

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \text{ より } (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

(2) 関数 $y=x^{\cos x}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，$x>0$．(6点)

答	$x^{\cos x}\left(-\sin x\log x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$

与式の両辺に自然対数をとると，$\log y=\cos x\log x$.
この両辺を x で微分すると，$\dfrac{y'}{y}=-\sin x\log x+\dfrac{\cos x}{x}$.
したがって，$y'=y\left(-\sin x\log x+\dfrac{\cos x}{x}\right)=x^{\cos x}\left(-\sin x\log x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

(3) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{y}{x^2+y^2}$ を計算せよ．(7点)

答	0

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ より}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}=-\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$
したがって，$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{2y(3x^2-y^2)-2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}=0$

(4) $z=x^2-y^2,\ x=3t-4,\ y=5t+4$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．(6点)

答	$-32(t+2)$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \text{ より}$$
$$\frac{dz}{dt}=2x\times 3-2y\times 5=6x-10y=6(3t-4)-10(5t+4)=-32t-64=-32(t+2)$$

令和６年度　専攻科入学者選抜後期学力検査問題【解答】

数学　　注意：解答過程をはっきりと書き，解答欄がある問題については結果を欄内に記入せよ．　

志望専攻名	受験番号	氏名
工学専攻		

得点

2.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ の値を求めよ．(6 点)

答　$\dfrac{1}{2}\log 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = [-\log|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log 2$$

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ の値を求めよ．(6 点)

答　1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D y dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D=\{(x,y)|\ x+y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$．　(7 点)

答　$\dfrac{1}{6}$

$D=\{(x,y)|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x\}$ より

$$\iint_D y dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} y dydx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}$$

(4) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D=\{(x,y)|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\}$．(6 点)

答　$\dfrac{2}{15}$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおくと，$D=\{(x,y)|\ 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\sin\theta\ r drd\theta = \frac{2}{15}$$

令和６年度　専攻科入学者選抜後期学力検査問題【解答】

数学　　注意：解答過程をはっきりと書き，解答欄がある問題については結果を欄内に記入せよ．　

志望専攻名	受験番号	氏名
工学専攻		

得点

以下，C, C_1, C_2 は任意定数を表す．

3.

(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}\log x = -\dfrac{y}{x}$ を解け（8点）．

答	$y\log x = C$

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ より，積の微分から

$$\text{与式} \Leftrightarrow y(\log x)' + \frac{dy}{dx}\log x = 0 \Leftrightarrow (y\log x)' = 0.$$

両辺を x で積分すると $y\log x = C$ を得る．

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x-5y}{5x+2y}$ を解け（8点）．

答	$4x^2 - 5xy - y^2 = C$

積の微分から

$$\text{与式} \Leftrightarrow 5x\frac{dy}{dx} + 5y + 2y\frac{dy}{dx} = 8x \Leftrightarrow 5(xy)' + (y^2)' = 8x.$$

両辺を x で積分すると，$5xy + y^2 = 4x^2 + C \Leftrightarrow 4x^2 - 5xy - y^2 = C$ を得る．

(3) 微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}\sin 2x$ を解け（9点）．

答	$y = e^{3x}\left(C_1x + C_2 - \dfrac{x}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x\right)$

$y = e^{3x}z(x)$ とおくと，$y' = e^{3x}(3z + z'),\ y'' = e^{3x}(9z + 6z' + z'')$ より

$$\text{与式} \Leftrightarrow e^{3x}(9z + 6z' + z'' - 18z - 6z' + 9z) = xe^{3x}\sin 2x \Leftrightarrow z'' = x\sin 2x.$$

両辺を x で積分すると，部分積分より

$$z' = \int x\sin 2x dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int\cos 2x dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1.$$

もう一度，両辺を x で積分すると，部分積分より

$$z = -\frac{1}{2}\int x\cos 2x dx + \frac{1}{4}\int\sin 2x dx + C_1x + C_2 = -\frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2.$$

$y = e^{3x}z$ だったから，求める一般解は

$$y = e^{3x}\left(C_1x + C_2 - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x\right).$$

令和６年度　専攻科入学者選抜後期学力検査問題【解答】

数学　　注意：解答過程をはっきりと書き，解答欄がある問題については結果を欄内に記入せよ．　

志望専攻名	受験番号	氏名
工学専攻		

得点

4. 二つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) A の逆行列を求めよ（12 点）．

答	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

サラスの展開により A の行列式は $|A| = 1$. Δ_{ji} を A から第 j 行と第 i 列を除いた二次正方行列の行列式とし，$b_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ji}$ とおくと，$b_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. 同様に，$b_{12} = -2, b_{13} = 5, b_{21} = 2, b_{22} = -3, b_{23} = 7, b_{31} = -1, b_{32} = 3, b_{33} = -7$. よって，求める逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

(2) B の固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ（13 点）．

答	λ を固有値とすると，固有ベクトルは $\lambda = 2$ の時 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$ の時 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$ の時 $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

題意の固有値を λ とおくと，

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -6 & -6 \\ 1 & \lambda + 1 & 2 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

よって，求める固有値は $\lambda = 2, 1, -1$. 以下，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．

(i) $\lambda = 2$ のとき，$(2E_3 - A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = x$ かつ $y + z = 0$ より，求める固有ベクトルは

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （$x(\neq 0)$ は任意）．

(ii) $\lambda = 1$ のとき，$(E_3 - A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$ かつ $z = -y$ より，求める固有ベクトルは

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ （$y(\neq 0)$ は任意）．

(iii) $\lambda = -1$ のとき，$(-E_3 - A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -2z$ かつ $y = 0$ より，求める固有ベクトルは

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （$z(\neq 0)$ は任意）．

※ x, y, z の値は問わない．