解答

令和７年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学　(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き, 答を指定の欄に記入して下さい.

志望専攻名	受検番号	氏名
工学専攻		

得点	総得点

問題１. 次の各問いに答えよ. 配点 (1) 5 点, (2) 5 点, (3) 7 点, (4) 7 点

(1) 関数 $y=\sqrt{1+x^2+\sin 2x}$ の導関数 y' を求めよ.

答　$\dfrac{x+\cos 2x}{\sqrt{1+x^2+\sin 2x}}$

$$y'=\frac{2x+2\cos 2x}{2\sqrt{1+x^2+\sin 2x}}=\frac{x+\cos 2x}{\sqrt{1+x^2+\sin 2x}}$$

(2) 関数 $y=(1+x^2)^x$ の導関数 y' を求めよ.

答　$(1+x^2)^x\left\{\log(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}\right\}$

$\log y = x\log(1+x^2)$. 両辺を x で微分すると, $\dfrac{y'}{y}=\log(1+x^2)+x\dfrac{2x}{1+x^2}=\log(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

よって, $y'=y\left\{\log(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}\right\}=(1+x^2)^x\left\{\log(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}\right\}$.

(3) 関数 $z=\log(x^2+xy-y^2)$ の第 2 次偏導関数 z_{xy} を求めよ.

答　$\dfrac{-x^2+4xy+y^2}{(x^2+xy-y^2)^2}$

$$z_x=\frac{2x+y}{x^2+xy-y^2}.$$

$$z_{xy}=\frac{(x^2+xy-y^2)-(2x+y)(x-2y)}{(x^2+xy-y^2)^2}=\frac{-x^2+4xy+y^2}{(x^2+xy-y^2)^2}.$$

(4) 関数 $f(x,y)=x^4-2x^2+y^2$ の極値を求めよ.

答　極小値は $f(\pm1,0)=-1$. 極大値はない.

$f_x=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x-1)(x+1)=0$, $f_y=2y=0$ とおくと, $(x,y)=(\pm1,0)$, $(0,0)$.

ところで, $f=(x^2-1)^2+y^2-1$ より, $f(\pm1,0)=-1$ は最小値であり, 極小値でもある.

一方, $0<|\epsilon|<1$ のとき, $f(\epsilon,0)=\epsilon^4-2\epsilon^2=-\epsilon^2(2-\epsilon^2)<0$,　$f(0,\epsilon)=\epsilon^2>0$. したがって, 原点の

いくらでも近くに $f(0,0)=0$ よりも大きな値をとる点と, 0 よりも小さな値をとる点が存在するので,

$f(0,0)=0$ は極値ではない.

解答

令和７年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学　(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き，答を指定の欄に記入して下さい．

志望専攻名	受検番号	氏名
工学専攻		

得点

問題２．次の定積分や２重積分の値を求めよ．配点 各７点

(1) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

答	$4-2\log 3.$

$\sqrt{x}=t$ とおくと，$x=t^2$, $\dfrac{dx}{dt}=2t.$ $\begin{array}{c|c} x & 0\to 4 \\ t & 0\to 2 \end{array}$

与式 $\displaystyle=\int_0^2 \frac{1}{1+t}2t\,dt=\int_0^2\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt=\Big[2t-2\log(1+t)\Big]_0^2=4-2\log 3.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$

答	$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$

与式 $\displaystyle=\Big[x\tan^{-1}x\Big]_0^1-\int_0^1 x\frac{1}{1+x^2}\,dx=\tan^{-1}1-\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2.$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 4\}$

答	$\pi\log 5$

与式 $\displaystyle=\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{1+r^2}r\,drd\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\log(1+r^2)\right]_0^2 d\theta=\left[\frac{1}{2}\log 5\cdot\theta\right]_0^{2\pi}=\pi\log 5.$

(4) $\displaystyle\iint_D (1+x^2+y^2)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid x^2\leqq y\leqq 1\}$

答	$\dfrac{76}{35}$

与式 $\displaystyle=\int_{-1}^1\int_{x^2}^1(1+x^2+y^2)\,dydx=\int_{-1}^1\left[(1+x^2)y+\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^1 dx=\int_{-1}^1\left\{(1+x^2)(1-x^2)+\frac{1-x^6}{3}\right\}dx$

$\displaystyle=2\int_0^1\left(\frac{4}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=2\left[\frac{4}{3}x-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right]_0^1=2\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}\right)=2\cdot\frac{140-21-5}{3\cdot5\cdot7}=\frac{2\cdot114}{3\cdot5\cdot7}=\frac{76}{35}.$

令和７年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学　(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き，答を指定の欄に記入して下さい．　

志望専攻名	受検番号	氏名
工学専攻		

得点

問題３．次の微分方程式の一般解を求めよ．配点 各７点

(1) $\sqrt{4-x^2}\dfrac{dy}{dx}=4+y^2$

答	$y=2\tan\left(2\sin^{-1}\dfrac{x}{2}+C\right)$ (C は任意定数)

与式より，$\dfrac{1}{4+y^2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$．両辺を x で積分すると，$\displaystyle\int\frac{1}{4+y^2}\,dy=\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$．したがって，

$\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{y}{2}=\sin^{-1}\dfrac{x}{2}+\dfrac{C}{2}$ (C は任意定数)．よって，$\tan^{-1}\dfrac{y}{2}=2\sin^{-1}\dfrac{x}{2}+C$ より，$\dfrac{y}{2}=\tan\left(2\sin^{-1}\dfrac{x}{2}+C\right)$．

ゆえに，$y=2\tan\left(2\sin^{-1}\dfrac{x}{2}+C\right)$．

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\dfrac{y}{x}+1$

答	$y=x\tan(\log\lvert x\rvert+C)$ (C は任意定数)

$\dfrac{y}{x}=v$ とおくと，$y=xv$．よって，$\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$．これらを与式に代入すると，$v+x\dfrac{dv}{dx}=v^2+v+1$．よって，

$x\dfrac{dv}{dx}=v^2+1$ より，$\dfrac{1}{v^2+1}\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1}{x}$．ここで，両辺を x で積分すると，$\displaystyle\int\frac{1}{v^2+1}\,dv=\int\frac{1}{x}\,dx$．したがって，

$\tan^{-1}v=\log\lvert x\rvert+C$ (C は任意定数)．ゆえに，$v=\tan(\log\lvert x\rvert+C)$，$y=xv$ より，$y=x\tan(\log\lvert x\rvert+C)$，

(3) $y''-5y'-6y=e^{2x}$

答	$y=Ae^{6x}+Be^{-x}-\dfrac{1}{12}e^{2x}$ (A, B は任意定数)

与式の補助方程式 $y''-5y'-6y=0$ の特性方程式 $t^2-5t-6=0$ を解くと，$(t-6)(t+1)=0$ より $t=6,-1$．

よって，補助方程式の一般解は，$y=Ae^{6x}+Be^{-x}$ (A, B は任意定数)．一方，与式の特殊解を $y=Ce^{2x}$ とおいて

与式に代入すると，$4Ce^{2x}-5\cdot2Ce^{2x}-6Ce^{2x}=e^{2x}$，すなわち，$-12Ce^{2x}=e^{2x}$ より，$C=-\dfrac{1}{12}$．ゆえに，与式

の特殊解は，$y=-\dfrac{1}{12}e^{2x}$ であるから，与式の一般解は，$y=Ae^{6x}+Be^{-x}-\dfrac{1}{12}e^{2x}$．

(4) $y''-2y'+y=e^x\sin x$

答	$y=(-\sin x+Ax+B)e^x$ (A, B は任意定数)

$y=ue^x$ とおき与式に代入すると，$(u''+2u'+u)e^x-2(u'+u)e^x+ue^x=e^x\sin x$．よって，$u''e^x=e^x\sin x$．

これより，$u''=\sin x$ を得る．この両辺を２回積分すると，$u=-\sin x+Ax+B$ (A, B は任意定数)．ゆえに，

求める一般解は，$y=(-\sin x+Ax+B)e^x$．

解答

令和７年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学　(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き，答を指定の欄に記入して下さい．

志望専攻名	受検番号	氏名
工学専攻		

得点

問題４．行列 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．配点 (1) 10 点，(2) 10 点

(1)　A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

答	固有値は 3, 1 で，対応する固有ベクトルはそれぞれ，$\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}b\\c\\-b-c\end{pmatrix}$ (a,b,c は任意定数だが $a\neq 0$ であり，b, c のうち少なくとも一方は 0 でない．

3 次の単位行列を E とし，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)-(\lambda-1)=(\lambda-3)(\lambda-1)^2=0$$

を解くと，A の固有値 $\lambda=3,1$ を得る．対応する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ とおく．

(i) $\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおくと，$A\overrightarrow{u_1}=3\overrightarrow{u_1}$ より $(A-3E)\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{0}$．よって，$\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$．これより，

$x-y+z=0$, $-2z=0$ となるから，$x=a$ とおくと，$\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (a は 0 以外の任意定数)．

(ii) $\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおくと，$A\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{u_2}$ より $(A-E)\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{0}$．よって，$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$．これより，

$x+y+z=0$ となるから，$x=b$, $y=c$ とおくと，$\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}b\\c\\-b-c\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ (b, c は，$b\neq 0$ または $c\neq 0$ である任意定数)．

(2)　A の逆行列を求めよ．

答	$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccccc}2&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccccc}1&2&1&0&1&0\\2&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccccc}1&2&1&0&1&0\\0&-3&-1&1&-2&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1&2&1&0&1&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccccc}1&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$