令和６年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題【解答】

数学　　注意：解答過程をはっきりと書き，解答欄がある問題については結果を欄内に記入せよ．

志望専攻名	受験番号	氏名
工学専攻		

得点	総得点

1.

(1) 関数 $y=\sqrt{x+3}\ (x>-3)$ の導関数を求めよ（6 点）．

答	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

$y=(x+3)^{\frac{1}{2}}$ より $y'=\dfrac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

ここに −1 を
はさんで間違えたら −1

(2) 関数 $y=\sin(e^x)$ の導関数を求めよ（6 点）．

答	$y'=e^x\cos(e^x)$

$t=e^x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=e^x$．一方，$y=\sin t$ より $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$ なので，合成関数の微分より

△2

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=(\cos t)\cdot(e^x)=e^x\cos(e^x).$$

(3) 関数 $y=x^{1+\sin x}\ (x>0)$ の導関数を求めよ（6 点）．

答	$y'=x^{\sin x}(x\cos x\log x+1+\sin x)$

与式両辺の対数をとり $\log y=(1+\sin x)\log x$．この両辺を x で微分して，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\boxed{\cos x}\log x+(1+\sin x)x^{-1}.$$

ここを $1+\cos x$ にしたら −1

両辺に $y(=x^{1+\sin x})$ を掛けて，

$$y'=x^{1+\sin x}\{\cos x\log x+x^{-1}(1+\sin x)\}=x^{\sin x}(x\cos x\log x+1+\sin x)$$

(4) 二変数関数 $z=x^4+2x^2+y^2+4xy+5$ の極小値とそのときの (x,y) を求めよ（7 点）．

答	$(x,y)=(\pm1,\mp2)$ のとき，極小値 4．（複号同順）

片方が抜けた
だけ（他は完ぺき）なら −1

偏導関数が合う度に +1

$z_x=4(x^3+x+y)$ かつ $z_y=2(y+2x)$ より $z_x=z_y=0\Leftrightarrow(x,y)=(0,0),(\pm1,\mp2)$（以下，複号同順．）さらに，$z_{xx}=4(3x^2+1)(\geqq 4)$, $z_{yy}=2$, $z_{xy}=4$．ここで，$H=z_{xy}^2-z_{xx}z_{yy}=8(1-3x^2)$.

(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき，$H=8>0$ より z は極値をとらない．

(ii) $(x,y)=(\pm1,\mp2)$ のとき，$H=-16<0$ かつ $z_{xx}>0$ より極小値 $z=1+2+4+4\cdot(-2)+5=4$ をとる．

令和６年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題【解答】

数学　　注意：解答過程をはっきりと書き，解答欄がある問題については結果を欄内に記入せよ．　　

志　望　専　攻　名	受験番号	氏　　名
工学専攻		

得　点

2.

(1) 不定積分 $\int x^2 e^x dx$ を求めよ（6 点）．

答	$(x^2 - 2x\boxed{+}2)e^x + C$　（C は積分定数）

ここを−に したら−1.5.　　抜けてても可

部分積分より

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx\right) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 2x\, dx$ を求めよ（6 点）．

答	$\dfrac{4}{15}$

ただし，$2x = t$ としたら△4.

$\cos^5 2x = \cos 2x(1 - \sin^2 2x)^2 = \dfrac{1}{2}(\sin 2x)'(1 - \sin^2 2x)^2$ より，$s = \sin 2x$ とおくと，

公式を 誤って適用 したら2点

$$与式 = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - s^2)^2 ds = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - 2s^2 + s^4) ds = \frac{1}{2}\left[s - \frac{2}{3}s^3 + \frac{s^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

(3) 定積分 $\int_5^6 \dfrac{1}{x^2 + 7x + 12} dx$ を求めよ（6 点）．

答	$\log \dfrac{81}{80}$

$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$ かつ $1 = (x+4) - (x+3)$ より

$$与式 = \int_5^6 \frac{(x+4) - (x+3)}{(x+3)(x+4)} dx = \int_5^6 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) dx = [\log(x+3) - \log(x+4)]_5^6 = \log \frac{81}{80}.$$

ここまでで△4.

$2\log 9 - \log 10 - \log 8$ を答とした後で統合したら△5.

(4) 重積分 $\iint_D \sqrt{5 - x^2 - y^2}\, dxdy,\ D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ を求めよ（7 点）．

答	$\dfrac{10\sqrt{5} - 16}{3}\pi$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (0 \leqq r \leqq 1$ かつ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とすると，$dxdy = r\,dr\,d\theta$ より

ここまでで△3

$$与式 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(5 - \boxed{r^2})^{\frac{1}{2}} dr = 2\pi\left[-\frac{1}{3}(5 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{10\sqrt{5} - 16}{3}\pi.$$

ここを2π として 求めたら +1.

ここまで できたら△5.

ここを$2r^2$に したら−1.

令和６年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題【解答】

数学　　注意：解答過程をはっきりと書き，解答欄がある問題については結果を欄内に記入せよ．　(3/4)

志望専攻名	受験番号	氏名
工学専攻		

得点

3. 以下，C, C_1, C_2 は任意定数を表す．

抜けても可．

(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = x\tan y$ を解け（8 点）．

答	$\sin y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

$y = n\pi$（n は整数）のとき $\tan y = 0$ かつ $\dfrac{dy}{dx} = 0$ より与式成立．一方，$y \neq n\pi$ のとき，与式 $\Leftrightarrow \dfrac{\cos y}{\sin y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = x$ かつ $\dfrac{d}{dy}(\sin y) = \cos y$ より $\log|\sin y| = \dfrac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow \sin y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ $(\cdots ①)$．この解で $C = 0$ とすると $y = n\pi$ なので，求める解は ① のみで良い．

$\displaystyle\int \frac{1}{\tan y}\,dy = \int x\,dx$ が言えたら△4．

$\displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ が言えたら +1

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$ を解け（8 点）．

答	$x^3 - 3xy^2 = C$

$\dfrac{y}{x} = v$ とし，$y' = xv' + v$ としたら△3

与式 $\Leftrightarrow 2xy\dfrac{dy}{dx} + y^2 = x^2$ $(\cdots ②)$ でかつ $(y^2\cdot x)' = 2xy\dfrac{dy}{dx} + y^2$ より ② の両辺を x で積分すると，$xy^2 = \dfrac{x^3}{3} + C$．整理して上記の解を得る．

$\log|1 - 3v^2| + \log x^3 = C$ で△7．

符号ミスでさら−1．

(3) 微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$ を解け（9 点）．

答	$y = \left(-\dfrac{\sin 3x}{9} + \boxed{C_1}x + \boxed{C_2}\right)e^{2x}$

「任意定数」と言わなくても可．

$y = e^{2x}z(x)$ とおくと，$y' = (2z + z')e^{2x}$, $y'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}$ より

$$
\begin{aligned}
\text{与式} \quad &\Leftrightarrow \quad \{(z'' + 4z' + 4z) - 4(2z + z') + 4z\}e^{2x} = e^{2x}\sin 3x \\
&\Leftrightarrow \quad z'' = \sin 3x \\
&\Leftrightarrow \quad z' = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1 \\
&\Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

$y = e^{2x}(Ax + B)$ が出たら△5．

よって，求める一般解は $y = \left(-\dfrac{\sin 3x}{9} + C_1 x + C_2\right)e^{2x}$

令和６年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題【解答】

数学　　注意：解答過程をはっきりと書き，解答欄がある問題については結果を欄内に記入せよ．　　

志望専攻名	受験番号	氏名
工学専攻		

得点

4. 行列

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) A の逆行列を求めよ（12 点）．

成分合う度に＋1

やり方合えば＋3

答	$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

サラスの展開により A の行列式は $|A|=-4$. Δ_{ji} を A から第 j 行と第 i 列を除いた二次正方行列の行列式とし，$b_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ji}$ とおくと，$b_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2$. 同様に，$b_{12}=b_{21}=-2$, $b_{13}=b_{31}=0, b_{22}=0, b_{23}=b_{32}=-2, b_{33}=-2$. よって，求める逆行列は

$$A^{-1}=\frac{1}{\boxed{-4}}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

−4ごと抜けてたら−1

ここだけ計ミスしたら−1.

(2) A の固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ（13 点）．

答	λ を固有値とすると，固有ベクトルは $\lambda=2$ のとき $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\lambda=1$ のとき $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\lambda=-2$ のとき $\begin{pmatrix}1\\-2\\\boxed{1}\end{pmatrix}$.

−1に1にしたら−1

題意の固有値を λ とおくと，

$$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+2).$$

＋1点

固有値一つで＋2

よって，求める固有値は $\lambda=2,1,-2$. 以下，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とする．

(i) $\lambda=2$ のとき，$(2E_3-A)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow y=0$ かつ $z=-x$ より，求める固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ （$x(\neq 0)$ は任意）．

固有ベクトル一つで＋2

(ii) $\lambda=1$ のとき，$(E_3-A)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=y=z$ より，求める固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}y\\y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ （$y(\neq 0)$ は任意）．

(iii) $\lambda=-2$ のとき，$(-2E_3-A)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=z$ かつ $y=-2z$ より，求める固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ （$z(\neq 0)$ は任意）．

※ x,y,z の値は問わない．