解答

令和５年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学　(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き，答を指定の欄に記入して下さい．　(1／4)

志望専攻名	受検番号	氏名
工学専攻		

得点	総得点

問題1． 次の各問いに答えよ． 配点 (1) 5 点, (2) 5 点, (3) 8 点, (4) 7 点

(1)　$f(x)=\tan^{-1}\dfrac{1}{1-x}$ のとき，$f'(x)$ を求めよ．

答　$\dfrac{1}{2-2x+x^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2+1}=\frac{1}{2-2x+x^2}$$

3

(計算過程による減点は行わない)

(2)　$f(x)=\log|\sin x+\cos x|$ のとき，$f''(x)$ を求めよ．

答　$-\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$

$f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$ より 2

$$f''(x)=\frac{-(\sin x+\cos x)^2-(\cos x-\sin x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{-2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{(\sin x+\cos x)^2}=-\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$$

3　4

(計算過程による減点は行わない)

(3)　$z=\dfrac{x-y}{x+y}$, $x=\sqrt{1+t}$, $y=\sqrt{1-t}$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

答　$\dfrac{1}{1-t^2+\sqrt{1-t^2}}$

$z_x=\dfrac{2y}{(x+y)^2}$, $z_y=-\dfrac{2x}{(x+y)^2}$, $x'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}=\dfrac{1}{2x}$, $y'(t)=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}=-\dfrac{1}{2y}$ より (各1)

$$\frac{dz}{dt}=\frac{y}{x(x+y)^2}+\frac{x}{y(x+y)^2}=\frac{y^2+x^2}{xy(x+y)^2}=\frac{(1-t)+(1+t)}{\sqrt{1-t^2}\,(x^2+2xy+y^2)}=\frac{2}{\sqrt{1-t^2}\,(2+2\sqrt{1-t^2})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}\,(1+\sqrt{1-t^2})}$$

5　6　7

(計算過程による減点は行わない)

(4)　$f(x,y)=e^{2x}(\cos y-\sin y)$ のとき，
$f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\{f_{xy}(x,y)\}^2$ を求めよ．

答　$-8e^{4x}$

$f_x=2e^{2x}(\cos y-\sin y)$, $f_y=e^{2x}(-\sin y-\cos y)$

$f_{xx}=4e^{2x}(\cos y-\sin y)$, $f_{yy}=e^{2x}(-\cos y+\sin y)$, $f_{xy}=-2e^{2x}(\cos y+\sin y)$ より (各1)

$$f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=-4e^{4x}(\cos y-\sin y)^2-4e^{4x}(\cos y+\sin y)^2=-4e^{4x}\left(2\cos^2 y+2\sin^2 y\right)=-8e^{4x}$$

6

(計算過程による減点は行わない)

解答

令和5年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学　(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き，答を指定の欄に記入して下さい．

志望専攻名	受検番号	氏名
工学専攻		

得点

問題2． 次の計算をせよ．配点 各5点

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\log x}{x}\,dx$

答 $\dfrac{3}{2}$

$1+\log x = t$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$．$\begin{array}{c|c} x & 1 \to e \\ \hline t & 1 \to 2 \end{array}$

与式 $= \displaystyle\int_1^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2 = \frac{3}{2}$

(計算過程による減点は行わない)

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$

答 2

与式 $= \left[-x^2e^{-x}\right]_0^\infty + 2\displaystyle\int_0^\infty x\cdot e^{-x}dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^2}{e^x}\right) + 2\left[-xe^{-x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-x}dx$ +1 +3

$= 2\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{e^x}\right) + 2\left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 2\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right) + 2 = 2$ +4

(計算過程による減点は行わない)

(3) $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$，$D$ は直線 $y=x$ と放物線 $y^2=x$ で囲まれた領域

答 $\dfrac{3}{20}$

$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq \sqrt{x}\}$ より +1

与式 $= \displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2\right) dx$ +2 +3

$= \left[\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3\right]_0^1 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{20}$ +4

(計算過程による減点は行わない)

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$，$D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9,\ y \geqq 0\}$

答 $\pi\log 3$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと，$D = \{(x,y) \mid 1 \leqq r \leqq 3,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$ +2

与式 $= \displaystyle\int_0^\pi \left\{\int_1^3 \frac{r}{r^2}dr\right\} d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_1^3 \frac{1}{r}\,dr = [\theta]_0^\pi\,[\log r]_1^3 = \pi\log 3$ +3 +4

(計算過程による減点は行わない)

解答

令和５年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学　(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き，答を指定の欄に記入して下さい．　(３／４)

志望専攻名	受検番号	氏名
工学専攻		

得点

問題３． 次の微分方程式の一般解を求めよ．配点 (1) 6 点, (2) 6 点, (3) 9 点, (4) 9 点

(1) $\cos x \sin y \dfrac{dy}{dx} = \sin x \cos y$

答	$\cos y = C\cos x$

(i) $y \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) のとき $\displaystyle\int \frac{\sin y}{\cos y}dy = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx.$ +2
$-\log|\cos y| = -\log|\cos x| + C$ であるから $\cos y = C\cos x.$ +4
(ii) $y = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) のとき，これは与式の解である．
しかし，上式の一般解において $C = 0$ とすれば得られる． +5
(i),(ii) より，求める一般解は $\cos y = C\cos x$

(計算過程による減点は行わない)

(2) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$

答	$y = -\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{C}{x}$

与式の両辺に x をかける．
$xy' + y = \sin x$ より，$(xy)' = \sin x$，$xy = \displaystyle\int \sin x dx$ であるから，$xy = -\cos x + C.$ +4
よって，求める一般解は $y = -\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{C}{x}.$

(計算過程による減点は行わない)

(3) $y'' + 2y' + 2y = x$

答	$y = e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

微分演算子 D を用いると，与式は $(D^2 + 2D + 2)y = x$ と表される．
(i) $(D^2 + 2D + 2)y = 0$ とおく．特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ を解くと，$\lambda = -1 \pm i.$ +2
したがって，一般解は $y_h = e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x).$ +5
(ii) 特殊解を y_p とおく．$y_p = \dfrac{1}{D^2 + 2D + 2}x = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ +4
(i),(ii) より，求める一般解は $y = y_h + y_p = e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

(計算過程による減点は行わない)

(4) $y'' - y = e^x + e^{2x}$

答	$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \dfrac{1}{2}xe^x + \dfrac{1}{3}e^{2x}$

微分演算子 D を用いると，与式は $(D^2 - 1)y = e^x + e^{2x}$ と表される．
(i) $(D^2 - 1)y = 0$ とおく．特性方程式 $\lambda^2 - 1 = 0$ を解くと，$(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$ より $\lambda = \pm 1.$ +2
したがって，一般解は $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$ +4
(ii) 特殊解を y_p とおく．$y_p = \dfrac{1}{D^2 - 1}(e^x + e^{2x}) = \dfrac{1}{(D+1)(D-1)}e^x + \dfrac{1}{D^2 - 1}e^{2x} = \dfrac{1}{2}xe^x + \dfrac{1}{3}e^{2x}.$ +5
(i),(ii) より，求める一般解は $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \dfrac{1}{2}xe^x + \dfrac{1}{3}e^{2x}.$

(計算過程による減点は行わない)

解答

令和５年度　専攻科入学者選抜前期学力検査問題

数学　(注意事項) 計算過程を問題下の空欄に書き，答を指定の欄に記入して下さい．

志望専攻名	受検番号	氏名
工学専攻		

得点

問題４． 次の各問いに答えよ．配点 (1) 10 点, (2)① 10 点, (2)② 5 点

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&0&2\\2&-3&1\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

答	$A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}6&-7&-4\\5&-5&-5\\3&-1&-2\end{pmatrix}$

$A=(a_{ij})$ とおくと

$\tilde{a}_{11}=6,\ \tilde{a}_{12}=5,\ \tilde{a}_{13}=3 \quad \therefore\ |A|=6-10+9=5$

$\tilde{a}_{21}=-7,\ \tilde{a}_{22}=-5,\ \tilde{a}_{23}=-1 \quad (|A|=7-0+2=5)$

$\tilde{a}_{31}=-4,\ \tilde{a}_{32}=-5,\ \tilde{a}_{33}=-2 \quad (|A|=-8+15-2=5)$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6&-7&-4\\5&-5&-5\\3&-1&-2\end{pmatrix}$$ (各1)

（計算過程による減点は行わない）

(2) 対称行列 $A=\begin{pmatrix}3&6\\6&-2\end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．

① A の固有値 λ_1,λ_2 $(\lambda_1>\lambda_2)$，および，λ_1,λ_2 に対応する固有単位ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ をそれぞれ１つずつ求めよ．

答	$\lambda_1=$ 7 のとき $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，$\lambda_2=$ -6 のとき $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ より，$\begin{vmatrix}3-\lambda&6\\6&-2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-42=(\lambda+6)(\lambda-7)=0$

$\therefore\ \lambda_1=7,\ \lambda_2=-6$　各2

$\lambda_1=7$ のとき，$\begin{pmatrix}-4&6\\6&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ より，$2x-3y=0,\ 2x=3y \quad \therefore\ \boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ とおくと

$|\boldsymbol{x}_1|=\sqrt{13}$ より，$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ は条件を満たす（異符号でも可）

$\lambda_2=-6$ のとき，$\begin{pmatrix}9&6\\6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ より，$3x+2y=0,\ 3x=-2y \quad \therefore\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ とおくと

$|\boldsymbol{x}_2|=\sqrt{13}$ より，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ は条件を満たす（異符号でも可）

（計算過程による減点は行わない）

② A を対角化する直交行列 P を求め，対角化せよ（答のみ記入せよ）．

答	$P=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3&-2\\2&3\end{pmatrix}$ のとき ${}^tPAP=\begin{pmatrix}7&0\\0&-6\end{pmatrix}$